

Απόδειξη

17/4/19

Εάν $f = f_1 - f_2$, f_1, f_2 αύξουσες. Εφόσον f_1, f_2 είναι μονότονες ~~και~~, είναι φραγμένες μεταβαίνοντας: $f_1 \in BV([a, b])$, $f_2 \in BV([a, b])$.
Επιπλέον εφόσον $BV([a, b])$ είναι διανυσματικός υπόχωρος επεται ότι και $f = f_1 - f_2 \in BV([a, b])$.

Αντιπροσφα

Έστω $f \in BV([a, b])$. Σύμφωνα με πρόταση για οποιαδήποτε $x \in (a, b)$ η $f \in BV([a, x])$ (δηλ. $V_a^x(f) < \infty$). Ορίζουμε την εξής συνάρτηση: $f_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f_1 = \begin{cases} 0 & x=a \\ V_a^x(f) & x \in (a, b] \end{cases}$
Η f_1 είναι για αύξουσα συνάρτηση διότι εάν $x < y$ τότε $f_1(x) = V_a^x(f) \leq V_a^x(f) + |f(y) - f(x)|$ (*) Εάν $\Delta = \{(x_{i-1}, x_i) : i=1, 2, \dots, n \text{ με } x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = y\}$. Από (*) έχουμε:

$$f_1(x) \leq V_a^x(f) + |f(x) - f(x_1)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(y) - f(x_{n-1})| = V_a^x(f) + V(f, \Delta)$$

Άρα $f_1(x) \leq V_a^x(f) + \sup\{V(f, \Delta) : \Delta \in \mathcal{P}(x, y)\} = V_a^x(f) + V_x^y(f) =$
πρόταση $V_a^y(f) = f_1(y)$. Άρα f_1 αύξουσα.

Εάν $f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_2 = f_1(x) - f(x)$. Η f_2 είναι επίσης αύξουσα διότι εάν $x, y \in [a, b]$ με $x < y$ τότε

(1) Εάν $a = x < y$ τότε $f_2(x) = f_2(a) = -f(a)$ και $f_2(y) = f_1(y) - f(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_2(y) = V_a^y(f) - f(y) \geq |f(x) - f(a)| + |f(y) - f(x)| - f(y) \geq \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ a \quad x \quad y \end{array} \geq f(x) - f(a) + f(y) - f(x) - f(y) = -f(a) = f_2(x)$$

Άρα $f_2(x) \leq f_2(y)$

(2) Εάν $a < x < y$ τότε εφόσον: $V_a^x(f) + V_x^y(f) = V_a^y(f)$ έπεται ότι

$$V_x^y(f) = V_a^y(f) - V_a^x(f) \text{ άρα } V_a^y(f) - V_a^x(f) = V_x^y(f) \geq |f(y) - f(x)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_a^y(f) - V_a^x(f) \geq f(y) - f(x) \text{ Άρα } V_a^y(f) - f(y) \geq V_a^x(f) - f(x) \Rightarrow$$

$$f_2(y) \geq f_2(x)$$

Άρα f_2 αύξουσα στο $[a, b]$ και $f_2(x) = f_1(x) - f(x) \Rightarrow f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ (43)

ΠΟΡΙΣΜΑ

Εάν $f \in BV([a,b])$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$.

Αποδείξη

Εφόσον $f \in BV([a,b])$, $\exists f_1, f_2$ αύξουσες συναρτήσεις ορισμένες στο $[a,b]$ τέτοιες ώστε: $f = f_1 - f_2$. Αλλά εφόσον f_1, f_2 μονότονες στο $[a,b]$ άρα είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$. Άρα f ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ ως διαφορά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Υποδείξη για την άσκηση (σελ 41)

Θα χρειαστεί διαμερίση, $|f \vee g(x_i) - f \vee g(x_{i-1})| = \begin{cases} f \vee g(x_i) - f \vee g(x_{i-1}) \\ -(f \vee g)(x_i) - f \vee g(x_{i-1}) \end{cases}$
Βρίσκω φράγμα για την 1^η περίπτωση, ελέγχω και για τη δεύτερη και βρίσκω φράγμα και για τις δύο

ΜΕΤΡΟ LEBESGUE

Στον $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε δύο άξονες: $x_1 O x'_1, x_2 O x'_2$

Στον $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε τρεις άξονες: $x_1 O x'_1, x_2 O x'_2, x_3 O x'_3$

Διαδοηκτικά μπορούμε να θεωρήσουμε στον $\mathbb{R}^n$ n -άξονες: $x_1 O x'_1, \dots, x_n O x'_n$.

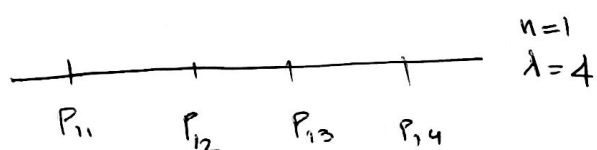
Πάνω σε κάθε άξονα $x_i O x'_i$ παίρνουμε ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων: $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i1}, a_{i1}$.

Ορίζουμε $P_{i,1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = a_{i1}\}$. Το $P_{i,1}$ αποδεικνύεται ότι είναι ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε κι άλλα υπερεπιπέδα P_{ij} όπου στην i -συντεταγμένη έχουμε το στοιχείο a_{ij} , $j=1,2,\dots,\lambda_i$.
Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω σε κάθε ένα από τους άξονες x'_i . Έτσι έχουμε ένα σύνολο υπερεπιπέδων P_{ij} για $j=1,\dots,\lambda_i$ και κάθε άξονα x'_i .

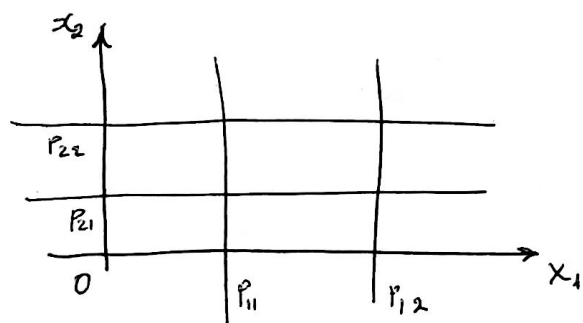
Έτσι ένα τέτοιο σύνολο υπερεπιπέδων το λέμε κιγκλίδωμα υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$.

π.χ (1) στον $\mathbb{R}$ ένα κιγκλίδωμα είναι ένα οποιοδήποτε πεπε-
ρασμένο σύνολο σημείων



"4 σημεία δημιουργούν 3 κλειστά διαστήματα"

(2) στον $\mathbb{R}^2$ ένα κιγκλίδωμα είναι ένα πεπερασμένο σύνολο
ευθειών που είναι κάθετο στους άξονες.



$n=2$
 $\lambda_1=2$
 $\lambda_2=2$

(3) στον $\mathbb{R}^3$ ένα κιγκλίδωμα είναι ένα πεπερασμένο σύνολο
επιπέδων κάθετων στους άξονες.

Κάθε κιγκλίδωμα δημιουργεί ένα πεπερασμένο πλήθος κλειστών
διαστημάτων της μορφής: $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ όπου I_i είναι
κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που δημιουργούνται στον
 x'_i άξονα.

π.χ αν $a_{i1} < a_{i2} < \dots < a_{i\lambda_i}$ σημεία στο x'_i άξονα δημιουργούνται
τα εξής κλειστά διαστήματα: $[a_{i1}, a_{i2}]$, $[a_{i2}, a_{i3}]$, ..., $[a_{i\lambda_i-1}, a_{i\lambda_i}]$
Τα κλειστά διαστήματα $I = I_1 \times \dots \times I_n$ του $\mathbb{R}^n$ που δημιουργούνται
με τη βοήθεια των κλειστών διαστημάτων I_i , ονομάζονται
βασικά διαστήματα του $\mathbb{R}^n$ (45)

- Για ένα κιγκλίδωμα Π , συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(\Pi)$ το σύνολο των βασικών διαστημάτων που ορίζονται με τη βοήθεια του Π . Εφόσον σε κάθε άξονα έχω λ_i το πλήθος σημεία και δημιουργούνται $(\lambda_i - 1)$ το πλήθος κλειστά διαστήματα (πάνω στον άξονα αυτό) άρα έχω $(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) \dots (\lambda_n - 1)$ το πλήθος βασικά διαστήματα $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$

~ Στην περίπτωση του επιπέδου: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$, $(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) = 1 \cdot 1 = 1$ ένα κλειστό διάστημα δημιουργήθηκε.

- Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^n$ και $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $b = (b_1, \dots, b_n)$. Σε κάθε άξονα x_i παίρνω δύο σημεία a_i και b_i .

Ορίζουμε τα παρακάτω υπερεπίπεδα:

- $P_{1,1} = \{ (a_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i \neq 1 \}$: στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με πρώτη συνιστώσα το a_1 .
- $P_{2,1} = \{ (x_1, a_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i \neq 2 \}$
- $\vdots$
- $P_{n,1} = \{ (x_1, x_2, \dots, a_n) : x_i \in \mathbb{R}, i \neq n \}$
- $P_{1,2} = \{ (b_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i \neq 1 \}$
- $\vdots$
- $P_{n,2} = \{ (x_1, x_2, \dots, b_n) : x_i \in \mathbb{R}, i \neq n \}$

Ονομάζω Π το κιγκλίδωμα που δημιουργείται από τα υπερεπίπεδα αυτά.

Εφόσον κάθε άξονας έχει μόνο 2 σημεία σε κάθε άξονα x_i δημιουργείται ένα μοναδικό διάστημα $I_i = [a_i, b_i]$ και έχω μόνο ένα $I \in \mathcal{D}(\Pi)$ και $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = [a, b]$

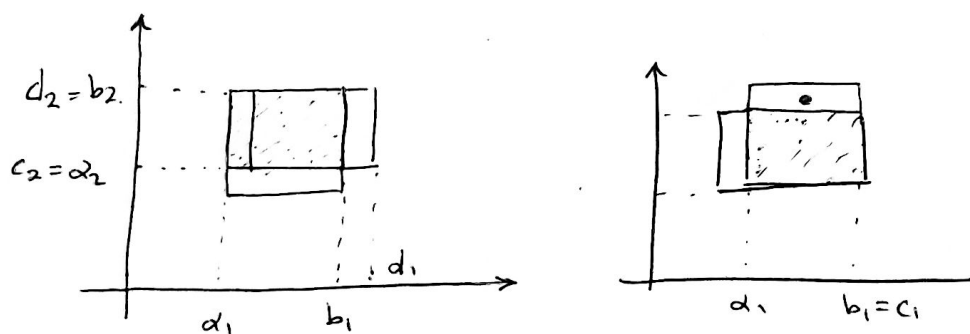
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $[a, b]$ ένα διαστήμα στον $\mathbb{R}^n$ που $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Ορίζουμε ως μέτρο Lebesgue ή χωρτικότητα του I τον αριθμό:

$$V(I) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

- $n=1$:
χωρτικότητα είναι το μήκος του διαστήματος
- $n=2$:
είναι το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου
- $n=3$:
ογκός

Εάν είμαστε στον $\mathbb{R}^2$ και έχουμε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ξένα μεταξύ τους που η ένωση τους είναι πάλι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Έστω $I_1 = [a, b]$ και $I_2 = [c, d]$ όπου $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ και $c = (c_1, \dots, c_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$. Τα I_1, I_2 είναι διαστήματα με $I_1^\circ \cap I_2^\circ = \emptyset^{(*)}$ και $I_1 \cup I_2$ θα είναι διάστημα αν ισχύει το εξής: υπάρχει κάποιος δείκτης $k \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιος ώστε $[a_i, b_i] = [c_i, d_i]$ για όλα $i \neq k$ και $a_k < b_k \leq c_k < d_k$ ή $c_k < d_k = a_k < b_k$

(*) Ξένα ως προς το εσωτερικό τους